

УДК 519.816

## КІЛЬКІСНА ОЦІНКА ЧУТЛИВОСТІ ЗАДАЧІ ОБРОБКИ ПОГЛЯДІВ ЕКСПЕРТІВ ЗА МЕТОДАМИ АНАЛІЗУ ІЄРАРХІЙ

Н.І. Недашківська

Інститут прикладного системного аналізу НТУУ «КПІ» МОН і НАН України

e-mail: n.nedashkivska@gmail.com

### Вступ

Методи аналізу ієрархій багатокритеріальної підтримки прийняття рішень на сьогоднішній день використовуються для розв'язання задач вибору, оцінювання, розподілу ресурсів, планування та розвитку та ін. в багатьох предметних областях [1]. Етапами цих методів є: 1) побудова ієрархії критеріїв, цілей, показників тощо, за якими оцінюються альтернативи рішень; 2) проведення експертами парних порівнянь елементів ієрархії і побудова матриць парних порівнянь; 3) математична обробка експертних оцінок: оцінювання узгодженості експертних оцінок, розрахунок локальних та глобальних коефіцієнтів відносної важливості (ваг) елементів ієрархії, ваг альтернатив рішень відносно кожного з критеріїв, цілей, показників тощо та відносно головної цілі прийняття рішення. Залежно від методів, які використовуються для розрахунку локальних та глобальних ваг, існують різні модифікації методів аналізу ієрархій.

Використовуючи відомі методи і підходи [2-4], в даній роботі наведено розв'язання задачі аналізу чутливості розв'язку, отриманого методами аналізу ієрархій, для ієрархії прийняття рішень, яка складається з двох рівнів: критерії (цілі) та альтернативи. Отримані результати проілюстровані на прикладі задачі розподілу ресурсів.

### Постановка задачі

Дано:  $A = \{a_i | i = 1, \dots, n\}$  – множина альтернативних варіантів рішень;  
 $C = \{C_j | j = 1, \dots, m\}$  – множина критеріїв (цілей);  $W^C = \{w_j^C\}, w_j^C$  – вага критерію (цілі)  $C_j$ ,  $\sum_{j=1}^m w_j^C = 1$ ;  $W = \{w_{ij}\}$ ,  $w_{ij}$  – локальна вага  $a_i$  відносно  $C_j$ ;  $W^{glob} = \{w_i^{glob}\}$ ,  
 $w_i^{glob}$  – глобальна вага альтернативи  $a_i$ ;

Оцінити чутливість глобальних ваг альтернатив до змін у вагах критеріїв (цілей).

### Розв'язання задачі

Нехай альтернативи перенумеровані таким чином, що ранжування альтернатив є наступним:

$$a_1 \succ a_2 \succ \dots \succ a_n, \text{ що еквівалентно умові } w_i^{glob} \geq w_j^{glob} \text{ при } i < j.$$

Знайдемо діапазони відносних змін ваг критеріїв (цілей), які призводять до змін ранжувань альтернатив при використанні дистрибутивного та мультиплікативного методів синтезу [2, 3].

Позначимо  $\Delta_{i,j,l}$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ ,  $l = 1, \dots, m$  величину абсолютної зміни ваги  $w_l^C$  критерію  $C_l$ , що призводить до зміни ранжування між альтернативами  $a_i$  та  $a_j$ . Тобто, нехай нова вага критерію  $C_l$  дорівнює

$$(w_l^C)' = w_l^C - \Delta_{i,j,l},$$

За припущенням для  $i < j$  виконується умова  $(w_i^{злоб})' < (w_j^{злоб})'$  зміни ранжування між  $a_i$  та  $a_j$ , де  $(w_i^{злоб})'$ ,  $(w_j^{злоб})'$  - нові глобальні ваги цих альтернатив.

Величину відповідної відносної зміни ваги  $w_l^C$  критерію  $C_l$  позначимо  $\delta_{i,j,l} = \Delta_{i,j,l} / w_l^C$ .

Вага – величина невід’ємна,  $(w_l^C)' > 0$ , тому величини  $\Delta_{i,j,l}$  і  $\delta_{i,j,l}$  мають задовольняти нерівностям  $(\Delta_{i,j,l} < w_l^C) \Leftrightarrow (\delta_{i,j,l} < 1)$ .

Критичним називається критерій  $C_{l_{crit}}$ , який має найменше значення  $|\delta_{i,j,l}|$  [3]:

$$|\delta_{i,j,l_{crit}}| = \min_{l=1,\dots,m} \left\{ |\delta_{i,j,l}| \right\}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Критерій називається стійким, якщо ніякі припустимі зміни його ваги не призводять до зміни рангу ні однієї альтернативи. Ступенем критичності критерію  $C_l$  називається величина найменшої відносної зміни його ваги  $w_l^C$ , яка призводить до зміни ранжування між будь-якою парою альтернатив [3]:

$$CritVal_1(C_l) = \min_{\substack{i,j=1,\dots,n \\ i < j}} \left\{ |\delta_{i,j,l}| \right\}, \quad l = 1, \dots, m.$$

Чим меншим є ступінь критичності критерію  $C_l$ , тим «легше» змінити ранжування альтернатив, тобто менше значення ступеня критичності свідчить про меншу зміну ваги  $w_l^C$ , яку достатньо здійснити для зміни ранжування альтернатив.

Чутливістю критерію  $C_l$  називається величина, обернена до ступеня його критичності [3]:

$$SensVal(C_l) = 1 / CritVal(C_l),$$

причому якщо  $C_l$  - стійкий, то покладемо значення чутливості  $SensVal(C_l) = 0$ . Оскільки  $\delta_{i,j,l} < 1$ , то  $CritVal(C_l) < 1 \Rightarrow SensVal(C_l) > 1$ .

Твердження 1. Величина  $\delta_{i,j,l}$  відносної зміни ваги  $w_l^C$  критерію  $C_l$ , що призводить до зміни ранжування між альтернативами  $a_i$  та  $a_j$ ,  $1 \leq i < j \leq n$ ,  $l = 1, \dots, m$  при використанні дистрибутивного методу синтезу задовольняє нерівності:

$$\delta_{i,j,l} < \delta_{i,j,l}^{порог}, \quad \text{якщо } w_{jl} - w_{il} > 0; \quad \delta_{i,j,l} > \delta_{i,j,l}^{порог}, \quad \text{якщо } w_{jl} - w_{il} < 0,$$

де порогове значення  $\delta_{i,j,l}^{порог}$  величини  $\delta_{i,j,l}$  обчислюється за формулою

$$\delta_{i,j,l}^{порог} = \frac{w_j^{злоб} - w_i^{злоб}}{w_{jl} - w_{il}} \cdot \frac{1}{w_l^C} \quad (1)$$

за умов: 1)  $w_i^{злоб} \geq w_j^{злоб}$  для  $i < j$ ; 2)  $\delta_{i,j,l}^{порог} < 1$ .

Наслідок 1. Критерій  $C_l$  стійкий, якщо умова  $\delta_{i,j,l}^{порог} \geq 1$  виконується при  $\forall 1 \leq i < j \leq n$ , де порогове значення  $\delta_{i,j,l}^{порог}$  обчислюється згідно з (1).

**Наслідок 2.** Якщо  $w_{jl} \leq w_{il}$  для  $\forall l=1, \dots, m, i < j$ , тобто  $a_i$  не гірша за  $a_j$  за кожним з критеріїв, то ніякі припустимі зміни ваг критеріїв не призведуть до зміни ранжування між  $a_i$  та  $a_j$ .

**Твердження 2.** Величина  $\delta_{i,j,l}$  відносної зміни ваги  $w_l^C$ , що призводить до зміни ранжування між  $a_i$  та  $a_j, 1 \leq i < j \leq n, l=1, \dots, m$ , при використанні мультиплікативного

синтезу задовольняє нерівності:

$$\delta_{i,j,l} < \delta_{i,j,l}^{нороз}, \text{ якщо } \delta_{i,j,l}^{нороз} < 0; \quad \delta_{i,j,l} > \delta_{i,j,l}^{нороз}, \text{ якщо } \delta_{i,j,l}^{нороз} \geq 0,$$

де порогове значення  $\delta_{i,j,l}^{нороз}$  величини  $\delta_{i,j,l}$  обчислюється за формулою

$$\delta_{i,j,l}^{нороз} = \frac{\ln(w_i^{злюб}) - \ln(w_j^{злюб})}{\ln(w_{il}) - \ln(w_{jl})} \frac{1}{w_l^C}$$

за умов: 1)  $w_i^{злюб} \geq w_j^{злюб}$  для  $i < j$ ; 2)  $\delta_{i,j,l}^{нороз} < 1$ .

### Приклад

Розглянемо приклад оцінювання чутливості розв'язку задачі розподіл ресурсів, в якій інвестор визначає відносну привабливості альтернативних варіантів інвестицій: відкритий пайовий інвестиційний фонд, ПФ ( $a_1$ ); депозит ( $a_2$ ); готівка ( $a_3$ ) згідно з множиною своїх цілей: збереження принципів ( $c_1$ ); зростання (приріст прибутку) ( $c_2$ ); мінімізація ризику ( $c_3$ ); зусилля на управління ( $c_4$ ). Інвестор попарно порівняв альтернативи відносно кожної цілі і, використовуючи метод головного власного вектору методу аналізу ієрархій, були розраховані ваги цілей та локальні ваги альтернатив відносно кожної цілі (табл. 1). Далі дистрибутивний та мультиплікативний синтези були використані для розрахунку глобальних ваг альтернатив.

Таблиця 1 – Локальні ваги альтернатив відносно цілей (в дужках наведені ваги цілей) і глобальні ваги альтернатив інвестицій

Альтернативи	Локальні ваги альтернатив				Глобальні ваги альтернатив	
	$c_1$ (0.094)	$c_2$ (0.509)	$c_3$ (0.243)	$c_4$ (0.154)	Дистриб. синтез	Мультиплікативний синтез
$a_1$	0.090	0.649	0.065	0.114	0.372	0.312
$a_2$	0.455	0.279	0.361	0.405	0.335	0.436
$a_3$	0.455	0.072	0.574	0.481	0.293	0.252

Згідно з методом дистрибутивного синтезу, ранжування альтернатив інвестицій є наступним:  $a_1 \succ a_2 \succ a_3$ . Знайдемо, наприклад, порогове значення  $\delta_{1,2,2}^{нороз}$  відносної зміни ваги цілі  $c_2$  «зростання», що призводить до зміни ранжування між альтернативами  $a_1$  і  $a_2$ . Ця величина обчислюється за твердженням 1 і дорівнює  $\delta_{1,2,2}^{нороз} = 0.198$ . Додатне значення цієї величини свідчить про те, що вага цілі «зростання» має бути зменшена для зміни ранжування між альтернативами  $a_1$  і  $a_2$ . Порогове значення відносної величини цього зменшення дорівнює 19.8%. Так як  $w_{22} < w_{12}$ , то  $\delta_{1,2,2} > \delta_{1,2,2}^{нороз} = 0.198$  (див. умову

2 твердження 1). Таким чином, діапазон відносних значень змін ваг цілі  $C_2$ , що призводить до зміни ранжування між  $a_1$  і  $a_2$ , дорівнює  $\delta_{1,2,2} \in (0.198; 1.000)$ .

Відносні значення змін ваг усіх цілей, що призводять до змін ранжувань між різними парами альтернатив, наведені в табл. 2.

Використовуючи дані табл. 1, глобальні ваги альтернатив за методом мультиплікативного синтезу дорівнюють  $w_1^{зл\text{об}} = 0.312$ ,  $w_2^{зл\text{об}} = 0.436$ ,  $w_3^{зл\text{об}} = 0.252$ . Таким чином, оптимальною є альтернатива  $a_2$ , а ранжування альтернатив:  $a_2 \succ a_1 \succ a_3$ .

Згідно з означенням, критична ціль для зміни оптимальної альтернативи визначається як мінімальне значення відносних змін ваг у відповідному рядку табл. 2. Це мінімальне значення при дистрибутивному синтезі дорівнює 19.8% і відповідає цілі  $C_2$  при розгляді альтернатив  $a_1$  і  $a_2$ . Зменшення ваги цілі  $C_2$  на 19.8% призводить до зміни оптимальної альтернативи  $a_1$ , нею стає  $a_2$ . При використанні мультиплікативного синтезу збільшення ваги цілі  $C_2$  більш ніж на 77.8% призводить до зміни оптимальної альтернативи  $a_2$ , нею стає  $a_1$ ; відносної зміни ваги цілі  $C_2$ , рівної 19.3%, достатньо для зміни ранжування між неоптимальними альтернативами  $a_1$  і  $a_3$ .

Критерій  $C_2$  - найбільш чутливий до зміни ваги, за ним іде критерій  $C_3$ , потім  $C_4$  і останній -  $C_1$  (табл. 3).

Таблиця 2 – Порогові значення  $\delta_{i,j,l}^{порог}$

Пара альтернатив (i, j)	$\delta_{i,j,l}^{порог}$ , %							
	дистрибутивний синтез				мультиплікативний синтез			
	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$
( $a_1, a_2$ )	-108.7 <sup>*1</sup>	<b>19.8</b>	-51.8	-83.2	-	-77.8	80.3	-
( $a_1, a_3$ )	-230.8	27.0	-64.0	-140.1	-141.7	<b>19.3</b>	-40.8	-97.3
( $a_2, a_3$ )	- <sup>*2</sup>	39.8	-81.0	-358.0	-	79.8	-488.3	-

<sup>\*1</sup> Від'ємне значення величини  $\delta_{i,j,l}^{порог}$  свідчить про те, що вага цілі  $C_l$  має бути збільшена для зміни ранжування між альтернативами  $a_i$  та  $a_j$ ; <sup>\*2</sup> Прочерки означають, що ніякі припустимі зміни ваг цілей не призведуть до зміни ранжування між парою альтернатив, згідно з наслідком 2 твердження 1.

Таблиця 3 – Ступені критичності  $CritVal$  та чутливості  $SensVal$  цілей

Критерій	дистрибутивний синтез		мультиплікативний синтез	
	$CritVal$ , %	$SensVal$	$CritVal$ , %	$SensVal$
$C_1$	108.7	0.009	141.7	0.007
$C_2$	<b>19.8</b>	0.051	<b>19.3</b>	0.052
$C_3$	51.8	0.019	40.8	0.025
$C_4$	83.2	0.012	97.3	0.010

#### Література

1. Omkarprasad S. Vaidya, Sushil Kumar. Analytic hierarchy process: An overview of applications // European Journal of Operational Research. – 2006. – Vol. 169, № 1. –P. 1–29.
2. Недашківська Н.І. Оцінювання чутливості розв'язку задачі прийняття рішень із застосуванням методу аналізу ієрархій // Наукові вісті НТУУ «КПІ». –2006.-№2.–С.27– 36.
3. Панкратова Н.Д., Недашківська Н.І. Комплексне оцінювання чутливості рішення на основі методу аналізу ієрархій // Системні дослідження та інформаційні технології.–2006. - №3. - С.7 – 25.
4. Панкратова Н.Д., Недашківська Н.І. Оценивание многофакторных рисков в условиях концептуальной неопределенности // Кибернетика и системный анализ. – 2009. - №2. – С.72 – 82.