

УДК 004.896

АППРОКСИМАЦИЯ ПЛОСКИХ И ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КРИВЫХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ ЗАДАНЫМИ СПЛАЙНАМИ

В.Г. Калмыков, В.В. Вишнеvский, Т.Н. Романенко

Институт проблем математических машин и систем НАН Украины

e-mail: vl.kalmykov@gmail.com

Введение

Для большинства информационных систем, в частности, для медицинских информационных систем характерно накопление диагностической информации в виде различных графиков, например, кардиограмм, различного рода изображений, по которым требуется получить заключение специалиста, иначе говоря, принять то или иное решение. Большой и постоянно нарастающий объем данных вынуждает к разработке инструментов, позволяющих за счет автоматической и/или автоматизированной обработки исходных данных снизить нагрузку на специалистов, принимающих решение.

Исходные (диагностические) данные или экспериментальные кривые представляют собой результаты измерения, как правило, искаженные помехами. Предполагается, что процесс измерения данных полностью определяется некоторой неизвестной функцией $f(x,y)$ для плоских кривых или $f(x,y,z)$ для пространственных кривых. Результатом измерения является конечная последовательность I пар $\{x_i, y_i\}$ для случая плоских кривых, либо троек $\{x_i, y_i, z_i\}$ для случая пространственных кривых; $i = 1, I$. Иначе говоря, имеется реализация таблично заданной функции. Часто экспериментальные кривые представляют собой плоские или пространственные графики. Кроме того, это могут быть замкнутые кривые, например, контуры объектов изображений. Контуры объектов бинарных изображений представлены плоскими замкнутыми кривыми. Контуры объектов полутоновых изображений представлены пространственными замкнутыми кривыми, причем в качестве значений третьей координаты используются соответствующие значения яркости точек изображений. Графики, контуры объектов изображений – это, по-видимому, самый простой и давно использующийся способ когнитивного представления экспериментальных измерений в самых различных областях человеческой деятельности, которые позволяют оценить качественное свойство процесса, форму объекта, несмотря на помехи, погрешности измерения.

Самым основным признаком графика или контура является его форма, которая отображает функцию, порождающую видимую реализацию кривой. Различные реализации могут отличаться масштабом, количеством измерений, другими аффинными преобразованиями. Кроме того они очень часто искажены шумами. При этом основные особенности формы сохраняются. Для автоматической или автоматизированной обработки графика или контура аналитическое представление объекта должно быть получено. Предложенный метод аналитической оценки произвольного графика или контура рассматривается далее.

Метод и экспериментальная проверка

Описание кривых параметрически заданными функциями позволяет, как минимум, описать кривую произвольной сложности однозначными функциями – рис.1. Кривые, отображающие одни те же процессы или объекты, могут существенно отличаться друг от

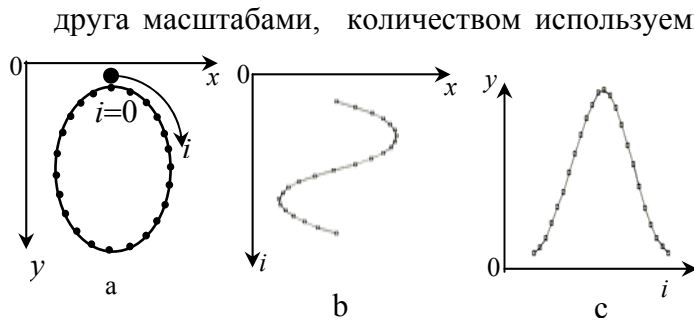


Рис.1. Контур простой фигуры – овала и его описание параметрическими функциями $x=\varphi(i)$, $y=\psi(i)$, i – номер точки в последовательности.

- а) исходный контур; точками показаны измерения; стрелкой показано начало и направление выполнения измерений координат точек контура.
 б) функция $x=\varphi(i)$; в) функция $y=\psi(i)$

друга масштабами, количеством используемых измерений, уровня шумов, и так далее. В то же время именно форма графической кривой характеризует параметры отображаемого объекта или процесса. Автоматическая (автоматизированная) обработка графических кривых предполагает сравнение их формы, чтобы установить, характеризуют ли различные графики или кривые одинаковые или разные процессы или объекты. Прямое использование нейросетевых методов или методов

статистического распознавания образов для решения этой задачи невозможно, потому что разные кривые, относящиеся

к одному и тому же объекту, могут отличаться друг от друга по таким параметрам как масштаб, помехи, количество измерений и т.д. Поскольку неизвестны функции, определяющие экспериментальные кривые, они должны быть аппроксимированы функциями, инвариантными к аффинным преобразованиям, чтобы сделать возможным сравнение этих кривых. Параметрически заданные сплайны [1,2,3] могут быть использованы для аппроксимации экспериментальных кривых. Обычно в компьютерной графике для получения плавных кривых, проходящих через заданные точки, используют сплайны. При этом количество точек не должно быть чрезмерно большим, чтобы доступные компьютерные ресурсы могли бы обеспечить решение соответствующих систем уравнений. Однако количество измеренных точек может быть слишком большим, чтобы использовать традиционные методы. В работах [4,5] рассмотрен метод использования сплайнов для аппроксимации экспериментальных кривых, которые заданы в табличной форме.

Кривые, в частности контуры объектов, могут иметь достаточно сложную форму. В явном виде трудно подобрать аналитическую функцию для описания таких кривых. В то же время всякая кривая может быть представлена в параметрическом виде: $X(t)$, $Y(t)$ – для случая плоской кривой, $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$ – для случая пространственной кривой, где t – некоторый параметр, $0 \leq t \leq 1$. Функции $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$ являются однозначными и могут быть представлены в виде полинома степени r .

Однако практически используемые последовательности измерений сложны для аппроксимации полиномами. Для достаточно длинных последовательностей измерений, которые представляют кривые сложной формы, используют кардинальные кубические сплайны ($r = 3$). Кардинальные кубические сплайны представляют собой последовательность N кубических полиномов, определяемых последовательностями управляющих точек $u = \{x_n, y_n, z_n\}$; $n = 1, N+1$; $N \ll I$. Каждому значению n в последовательности управляющих точек соответствует некоторое значение i_n . Рассматриваются только допустимые последовательности управляющих точек. Под допустимой последовательностью понимаем такую последовательность, что $i_n < i_{n+1}$.

Количество полиномов в последовательности определяется сложностью формы аппроксимируемой кривой. Каждому полиному соответствует $(i_{n+1}-i_n)$ измеренных значений. Каждой из координат соответствует последовательность полиномов $X(t) = \{X_n(t_n)\}$, $Y(t) = \{Y_n(t_n)\}$, $Z(t) = \{Z_n(t_n)\}$. Коэффициенты каждого из последовательности кубических полиномов для координаты x : $X_n(t) = a_{nx}t^3 + b_{nx}t^2 + c_{nx}t + d_{nx}$ определяются управляющими точками $x_{n-1}, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}$

$$\begin{aligned} a_{nx} &= T(x_{n+1} - x_{n-1}) + T(x_{n+2} - x_n) + 2x_n - 2x_{n+1} \\ b_{nx} &= -2T(x_{n+1} - x_{n-1}) - T(x_{n+2} - x_n) - 3x_n + 3x_{n+1} \\ c_{nx} &= T(x_{n+1} - x_{n-1}) \\ d_{nx} &= x_n, \end{aligned}$$

где T – натяжение. (при $T = 0$ получаем отрезок прямой, при увеличении T изгиб кривой увеличивается). Для большинства практических применений используется $T = 0.5$.

Для незамкнутых кривых при $n = 1$: $x_{n-1} = x_1$; при $n = N$: $x_{n+2} = x_{N+1}$. Для замкнутых кривых $x_{N+1} = x_1$; $y_{N+1} = y_1$; $z_{N+1} = z_1$; при $n = 1$: $x_{n-1} = x_N$; при $n = N$: $x_{n+2} = x_1$.

Формулы для определения коэффициентов последовательностей полиномов для координат y и z : $Y_n(t) = a_{ny}t^3 + b_{ny}t^2 + c_{ny}t + d_{ny}$, $Z_n(t) = a_{nz}t^3 + b_{nz}t^2 + c_{nz}t + d_{nz}$ аналогичны вышеприведенным формулам для $X_n(t)$.

Каждая последовательность управляющих точек определяет последовательность полиномиальных кривых.

Каждый из полиномов в последовательности определен на отрезке между управляющими точками $n, n+1$. Например, полином $X_n(t_n) = a_{nx}t_n^3 + b_{nx}t_n^2 + c_{nx}t_n + d_{nx}$ определяется управляющими точками: $x_{n-1}, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}$, на отрезке $|x_n, x_{n+1}|$ причем

$$t_{ni} = \frac{i - i_n}{i_{n+1} - i_n}$$

где $0 \leq t_{ni} \leq 1$, $i_n \leq i \leq i_{n+1}$.

Каждым i -тым значениям координат экспериментальной кривой x_i, y_i, z_i соответствуют значения аппроксимирующей кривой $X_n(t_{ni}), Y_n(t_{ni}), Z_n(t_{ni})$.

Для экспериментальной кривой, которая аппроксимируется, самая подходящая последовательность управляющих точек должна быть определена, последовательность полиномиальных кривых которой наилучшим образом отображает форму аппроксимируемой кривой.

Пусть (u) – множество всех допустимых последовательностей управляющих точек. Для некоторой последовательности управляющих точек u расстояние $d(u)$ между измеренными значениями экспериментальной кривой и вычисленными значениями аппроксимирующей кривой может быть представлено как

$$d(u) = \sum_{i=1}^{i=l} (x_i - X_n(t_{ni}))^2 + (y_i - Y_n(t_{ni}))^2 + (z_i - Z_n(t_{ni}))^2.$$

Тогда оптимальная последовательность управляющих точек для кардинального сплайна, аппроксимирующего экспериментальную кривую, может быть определена как

$$u_{opt} = \arg \min_{\forall u} d(u).$$

Метод градиентного спуска использован для нахождения u_{opt} .

Разработан и программно проверен метод аппроксимации экспериментальных кривых параметрически заданными кардинальными сплайнами. Примеры аппроксимации кривых приведены на рис.2. К достоинствам метода следует отнести инвариантность результата аппроксимации от количества измеренных точек экспериментальной кривой.

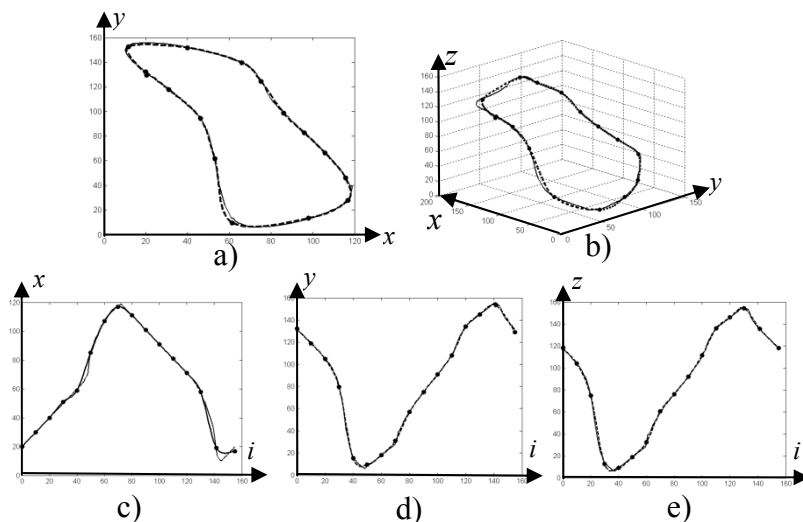


Рис.2. Примеры экспериментально полученных замкнутых контуров и их аппроксимация параметрически заданными сплайнами

Экспериментальные кривые показаны сплошными линиями; аппроксимирующие кривые представлены штриховыми линиями; управляющие точки представлены в виде кружочков.

- Измеренные точки плоской кривой, соединенных отрезками прямых линий и аппроксимация их параметрически заданной кривой с указанием контрольных точек. Измеренные параметрические компоненты кривой и их аппроксимирующие кривые приведены на графиках с) и d).
- Измеренные точки пространственной кривой, соединенные отрезками прямых линий и аппроксимация их параметрически заданной кривой с управляющими точками. Измеренные параметрические компоненты кривой и их аппроксимирующие кривые приведены на графиках с), d) и e).
- Графики измеренных компонентов для плоских и пространственных кривых, соответственно, для X , Y , Z координат, в зависимости от количества точек измерения I в качестве параметра и их аппроксимирующие кривые.

Заключение

Предлагаются способ и алгоритм аппроксимации для аналитического представления плоских и пространственных кривых. Метод использует предложенный ранее авторами метод аппроксимации экспериментальных данных с использованием параметрически заданных сплайнов.

Как и прежде, предложенный метод использует предположение о том, что все экспериментальные кривые являются реализацией некоторого неизвестного процесса или функции. Таким образом, измеренные точки экспериментальной кривой должны быть соединены последовательно, чтобы сформировать односвязную ломаную линию. Тогда область между экспериментально полученной ломаной линией и аппроксимирующей кривой может быть использовано в качестве меры различия между ними. Лучшей

аппроксимирующей кривой является такая, что область между ней и экспериментальной кривой минимальна.

Результат аппроксимации мало зависит от числа измеренных точек и шума. Полученное аналитическое представление экспериментальной кривой инвариантно по отношению к некоторым аффинным преобразованиям и может быть использовано для автоматической обработки экспериментальных данных – разбиение кривых на классы с последующим автоматическим распознаванием.

Список литературы

1. J.H. Ahlberg, E.N. Nilson and J.L. Wash, The Theory of Splines and Their Applications, Academic Press, New York, 1967.
2. D.F. Rogers, J.A. Adams, Mathematical Elements for Computer Graphics, McGraw-Hill, New York, 1976.
3. Carl de Boor, A Practical Guide to Splines, Springer New York, Inc., 2001.
4. Vitaliy Vishnevskiy, Vladimir Kalmykov, Tatyana Romanenko. Approximation of experimental data by Bezier curves// International Journal “Information theories & applications”. – Sofia. – 2008. – v. 15, № 3 – P. 235.
5. Tatyana Romanenko, Vitaliy Vishnevskiy, Vladimir Kalmykov. Analytical Representation of Graphs by Means of Parametrically Defined Splines // Proceedings of the international conference on applications of information and communication technology and statistics in economy and education ICAICTSEE – 2013 December 6-7th, 2013, UNVE, Sofia, Bulgaria – P.536-542.