

УДК 519.24

**ПЛАНУВАННЯ ТА ВИЗНАЧЕННЯ ОПТИМАЛЬНИХ ХАРАКТЕРИСТИК
БАГАТОФАКТОРНИХ ЕКСПЕРИМЕНТІВ НА БАЗІ РАЦІОНАЛЬНОЇ
КІЛЬКОСТІ ДОСЛІДІВ**

В.І. Попадинець

Інститут проблем математичних машин і систем НАН України

e-mail: vpopadinets@ukr.net

Вступ

Якщо число рівнів кожного фактора рівне двом, то число необхідних дослідів для реалізації повного факторного експерименту (ПФЕ) є $N = 2^n$, де n - число факторів, 2 – число рівнів. ПФЕ є доцільним тільки тоді коли реалізація кожного з дослідів для процесу, що розглядається не є вельми затратною.

ПФЕ дозволяє кількісно оцінити ефекти взаємодії факторів загальне число яких є

$$\bar{n} = \sum_{i=1}^{n-1} C_n^{i+1} = 2^n - n - 1 \quad (1)$$

Вважається, що експериментатор має можливість апіорі вибирати доцільну кількість дослідів

$$M = 2^{n-p} \quad (2)$$

шляхом вибору певного числа p ефектів взаємодії $n-p$ факторів причому

$$0 \leq p \leq \max_{k \geq 0} \{ n - k : 2^{n-k} \geq n + 1 \} \quad (3)$$

При цьому i -й ($0 \leq i \leq p$) ефект розглядається як результуючий ефект взаємодії факторів номери яких належать заданій множині θ_i ($\theta_0 = \emptyset$, $\theta_i \neq \theta_j \neq \emptyset$, $i, j = \overline{1, p}$), а оцінка результатів експерименту здійснюється на основі функції відгуку виду

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^{L+q} b_i z_i, \quad (4)$$

де

$$b_0, b_i - \text{const}, \quad (5)$$

$$L = n - p, \quad (6)$$

$$0 \leq q \leq p, \quad (7)$$

q – кількість результуючих ефектів взаємодії, які необхідно враховувати,

$$z_i \in [-1, 1] \quad (8)$$

Якщо розглядається ПФЕ, то

$$0 \leq p \leq \bar{n}, \quad (9)$$

а оцінка результатів експерименту здійснюється на основі функції відгуку виду

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^{n+\bar{q}} b_i z_i, \quad (10)$$

де

$$0 \leq \bar{q} \leq \bar{n}, \quad (11)$$

\bar{q} – кількість результуючих ефектів взаємодії, які необхідно враховувати.

Планування експерименту

Початковим етапом планування експерименту є побудова матриці планування виду

$$Z = \begin{bmatrix} z_{11} & \dots & z_{L1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ z_{1M} & \dots & z_{LM} \end{bmatrix} \quad (12)$$

де i - номер фактора, j - номер досліду.

Елементи матриці Z визначаються по формулам:

$$z_{kj} = \begin{cases} z_{\text{поч.}}, & \text{при } j = \overline{1, 2^{k-1}} \\ -z_{\text{поч.}}, & \text{при } j = \overline{2^{k-1} + 1, 2^k} \end{cases}, \quad k = \overline{1, L}, \quad (13)$$

$$z_{ij+2^{k-1}} = z_{ij}, \quad i = \overline{1, k-1}, \quad j = \overline{1, 2^{k-1}}, \quad k = \overline{2, L}, \quad (14)$$

де

$$z_{\text{поч.}} = -1 \vee 1. \quad (15)$$

Зазначимо, що z_{ij} - кодове значення i -го фактора в j -му експерименті. При цьому натуральне значення i -го фактора в j -му експерименті визначається по формулі:

$$x_{ij} = x_i^0 + z_{ij} \cdot \delta_i, \quad i = \overline{1, L}, \quad j = \overline{1, M}, \quad (16)$$

де

$$x_i^0 = (x_{i \min} + x_{i \max}) / 2, \quad (17)$$

$\delta_i = (x_{i \max} - x_{i \min}) / 2$ - інтервал варіювання i -го фактора,

$x_{i \min}, x_{i \max}$ - натуральні граничні значення зміни i -го фактора.

Тут і далі вважається, що фактори $x_i, i = \overline{1, L}$ незалежні змінні, а кожен з результатів досліду - випадкова величина з нормальним законом розподілу.

Побудова функцій відгуку

Відповідно до теорії планування експерименту [1] коефіцієнти $b_i (i = \overline{0, L+q})$ функції відгуку виду (4) визначаються по формулам

$$b_0 = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^{L+q} y_j, \quad (18)$$

$$b_i = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^{L+q} y_j z_{ij}, \quad (19)$$

де $y_j = y(x_{1j}, \dots, x_{Lj})$ - значення параметра оптимізації y в j -му досліді,

$$z_{i+Lj} = \prod_{k \in \theta_i} z_{kj}, \quad i = \overline{1, q}, \quad j = \overline{1, M}, \quad (20)$$

а, коефіцієнти $b_i (i = \overline{0, n+q})$ функції відгуку виду (10) визначаються по формулам:

$$b_0 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N y_j, \quad (21)$$

$$b_i = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N y_j z_{ij}, \quad (22)$$

де

$$z_{i+n_j} = \prod_{k \in \theta_i} z_{kj}, \quad i = \overline{1, \bar{q}}, \quad j = \overline{1, N} \quad (23)$$

Отже, елементи матриці планування експерименту (12) визначаються по формулам (13) - (17), а побудова функцій відгуку (4) та (10) здійснюється відповідно на основі формул (18) - (20) та (21) - (23).

Оцінка результатів експерименту

Так як функції (4) та (10) є лінійними функціями своїх аргументів, то

$$y^* = \{y(z_1^*, \dots, z_{L+q}^*)\} = \max_{1 \leq j \leq M} \{b_0 + \sum_{i=1}^{L+q} b_i z_{ij}^*\}, \quad (24)$$

$$y^{**} = \{y(z_1^{**}, \dots, z_{L+q}^{**})\} = \min_{1 \leq j \leq M} \{b_0 + \sum_{i=1}^{L+q} b_i z_{ij}^{**}\}, \quad (25)$$

та відповідно

$$y^* = \{y(\bar{z}_1^*, \dots, \bar{z}_{n+\bar{q}}^*)\} = \max_{1 \leq j \leq N} \{b_0 + \sum_{i=1}^{n+\bar{q}} b_i z_{ij}^*\}, \quad (26)$$

$$y^{**} = \{y(\bar{z}_1^{**}, \dots, \bar{z}_{n+\bar{q}}^{**})\} = \min_{1 \leq j \leq N} \{b_0 + \sum_{i=1}^{n+\bar{q}} b_i z_{ij}^{**}\}, \quad (27)$$

Результуючий ефект взаємодії факторів для функції відгуку виду (4) обчислюється по формулі

$$\Delta_1 = \sum_{i=L+1}^{L+q} b_i z_i, \quad (28)$$

а для функції відгуку виду (10) по формулі

$$\Delta_2 = \sum_{i=n+1}^{n+\bar{q}} b_i z_i, \quad (29)$$

При програмній реалізації пропонуємих алгоритмів є необхідним виключення з числа експериментальних даних грубих помилок, перевірка адекватності моделей (4) і (10) та перевірка значимості коефіцієнтів b_i . Для цього можуть бути використані відомі критерії Стюдента, Кохнера та Фішера [2].

Висновки

Розглянуті загальні алгоритми побудови матриці планування багатофакторного експерименту та визначення його оптимальних (мінімального та максимального) значень для скінченного числа факторів n ($n < \infty$) на основі апріорі визначеної матриці планування та функцій відгуку виду (4) або (10). Пропонуємі алгоритми зорієнтовані на створення автономного програмного модуля для рішення різноманітних задач планування та оцінки результатів оптимізаційних практичних задач, насамперед, для складних технологічних процесів і є доцільним для використання коли реалізація реальних дослідів, що здійснюються є вельми затратною.

Література

1. Адлер Ю.П. и др. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий. М. Наука. 1976., 279 с. Адлер Ю.П. и др. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий. М. Наука. 1976., 279 с.
2. Налимов В.В. Применение математической статистики при анализе вещества. М., гос. изд. физ.-мат. лит., 1960. 430 с.