

УДК 658.562

КОМБИНАТОРНИЙ АЛГОРИТМ ПАРНИХ СРАВНЕНИЙ С ОБРАТНОЮ СВЯЗЬЮ С ЕКСПЕРТОМ

В.В. Цыганок

Институт проблем регистрации информации НАН Украины

e-mail: tsyg@ukr.net

В системах поддержки принятия решений (СППР) для повышения достоверности информации, получаемой от экспертов, используются матрицы парных сравнений (МПП). МПП служат источником информации для большинства алгоритмов экспертной оценки информации. В процессе анализа и определения количественных и качественных показателей таких алгоритмов, в частности алгоритмов с обратной связью с экспертом, были отмечены некоторые их недостатки. Одним из основных недостатков есть значительное количество итераций алгоритмов и, как следствие, - большое количество вопросов эксперту в случаях, когда согласованность входной матрицы парных сравнений (МПП) не высокая, или/и в случаях, когда во входной матрице встречаются противоречия в ранжировании некоторых альтернатив.

Этот недостаток алгоритмов побудил задуматься над созданием нового алгоритма, который бы стремился свести количество вопросов эксперту к минимуму.

Метод подробно описан в [1], он базируется на следующем свойстве идеально согласованной матрицы парных сравнений (ИСМПП): \exists кортеж $\langle v_1; v_2; \dots v_k \rangle$, такой, что $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$ выполняется равенство $d_{ij} = f(v_i; v_j)$, где v – значения весов объектов, d – элементы матрицы парных сравнений. Это свойство базируется на следующем рассуждении: допустим, что значения весов объектов $\langle v_1; v_2; \dots v_k \rangle$ априори известны, то чтобы МПП была идеально согласованной необходимо, чтобы каждый элемент матрицы был однозначно определен через значения этих весов объектов. Из этого свойства следует, что некоторые элементы ИСМПП являются зависимыми между собой величинами, то есть, для $\forall i, j, m \in \{1, 2, \dots, k\}$ выполняется равенство $d_{ij} = f(d_{im}; d_{jm})$. Кстати, вид функции f зависит от типа сравнений, которые выбраны для оценки объектов. Так, в случае применения мультипликативных сравнений (когда при оценивании эксперту задается вопрос «Во сколько раз один объект превосходит другой по определенному критерию?»), равенство имеет вид: $d_{ij} = d_{im} / d_{jm}$, а в случае аддитивных сравнений (задается вопрос «На сколько ... ?») – это равенство принимает вид: $d_{ij} = d_{im} - d_{jm}$. В [1] показано, как путем простых преобразований получить эти зависимости. Таким образом, поскольку в ИСМПП часть ее элементов связаны между собой вышеупомянутой зависимостью, то можно выделить из общего множества элементов ИСМПП множества элементов минимальной мощности, с помощью каждого из которых, возможно вычислить остальные элементы ИСМПП, т.е. воссоздать всю ИСМПП целиком – множества информационно-весомых элементов.

Следует отметить, что множества информационно-весомых элементов включают не значения элементов ИСМПП, а позиции этих элементов в матрице. Т.о. имеется возможность найти множества позиций элементов ИСМПП, которые будут одинаковы для любых ИСМПП одинаковой размерности. Доказательство существования, свойства и

алгоритм нахождения множеств информационно-весомых элементов в ИСМПП подробно описаны в [1], там же получено и значение мощности этих множеств, равное $(k-1)$.

Суть метода заключается в нахождении ИСМПП, к которой, согласовав с мнением эксперта, – изменив значения некоторого множества элементов, – можно привести исходную МПП, полученную путем $(k^2 - k) / 2$ сравнений k объектов между собой (реальную МПП). В дальнейшем, по найденной ИСМПП определяются значения весов объектов.

Описание алгоритма

Дана реальная матрица D_0 , полученная при парном сравнении некоторых k объектов. Причем берутся к рассмотрению только элементы матрицы находящиеся справа от главной диагонали: $\{d_{ij} \mid i < j\}$ предполагая, что $d_{ji} = f(d_{ij})$. Так, для мультипликативных сравнений это выражение имеет вид $d_{ji} = 1 / d_{ij}$, а для аддитивных $d_{ji} = -d_{ij}$. Элементы главной диагонали, как не несущие информации, определяются однозначно $d_{ii} = 1$ и $d_{ii} = 0$ соответственно типу сравнений.

Алгоритм метода можно условно разделить на два этапа: подготовительный и поисковый.

Во время подготовительного этапа формируется и упорядочивается множество, элементами которого являются ИСМПП, полученные на основе множеств информационно-весомых элементов, взятых из реальной МПП. Опишем этот процесс.

Шаг 1. Формирование множеств информационно-весомых элементов для любой ИСМПП размерности $k \times k$.

Этот процесс заключается в переборе вариантов подмножеств мощности $n=(k-1)$ множества элементов матрицы, которое имеет мощность $m=(k(k-1) / 2)$ и отбора из этих вариантов (их C_m^n) - информационно-весомых по следующему алгоритму. Как показано в [1] необходимым и достаточным условием информационной-весомости множества элементов ИСМПП есть наличие пути между любыми двумя вершинами в неориентированном графе без петель, вершины которого обозначены номерами строк матрицы $(1..k)$, а наличие дуги, например, между вершинами a и b соответствует принадлежности d_{ab} к данному множеству. Исходя из этого, обозначим через S множество индексов элементов ИСМПП и инициализируем его парой индексов первого (любого) элемента из проверяемого варианта подмножества. Далее, перебирая по-порядку остальные элементы из проверяемого варианта подмножества, добавляем к множеству S один из индексов текущего тестируемого элемента только в том случае, если другой из этой пары индексов уже принадлежит к S . В случае, если добавление к S произошло, то текущий тестируемый элемент исключается из дальнейшего перебора. Перебор прекращается, если на протяжении его одного цикла к S не произошло ни одного добавления индекса. После этого анализируется множество S и, если оно содержит все без исключения k номеров индексов, то делается вывод о информационной весомости проверяемого варианта подмножества.

Шаг 2. Формирование множества состоящего из ИСМПП на базе найденных на предыдущем шаге множеств информационно-весомых элементов.

Каждая ИСМПП формируется из $(k-1)$ элементов реальной МПП находящихся на позициях найденных информационно-весомых элементов. Остальные элементы в каждой ИСМПП, которые не входят в конкретное множество информационно-весомых элементов, вычисляются исходя из выражения $d_{ij} = f(d_{im}; d_{jm})$. Каждая ИСМПП в сформированном множестве представляется кортежем тех элементов этой матрицы, которые отличаются от соответствующих элементов реальной матрицы.

Шаг 3. Сформированное множество таких кортежей упорядочивается по количеству элементов, имеющих в каждом кортеже, причем повторы исключаются. Это упорядочение помогает на следующем этапе алгоритма реализовать стратегию минимизации количества обращений за мнением эксперта.

На этом подготовительный этап алгоритма заканчивается. Следующий этап алгоритма – поисковый – связан с анализом сформированного набора из ИСМПП и с поиском в нем такой ИСМПП, в которую бы преобразовывалась реальная МПП путем изменения (увеличения или уменьшения) части ее элементов, согласовывая эти изменения с мнением эксперта.

Этот поиск заключается в последовательном, поэлементном анализе кортежей, которые состоят из элементов МПП и предложения эксперту изменить, в ту или иную сторону, значение элемента реальной МПП, чтобы приблизить его значение к значению элемента кортежа. Т.е. эксперту предлагается изменить степень преимущества одного объекта над другим в сторону его приближения к значению степени преимущества в соответствующей ИСМПП.

Сформированное на подготовительном этапе алгоритма множество кортежей корректируется в соответствии с уже высказанным мнением эксперта (согласия или отказа изменить конкретный элемент МПП) путем исключения тех кортежей, которые перестали отвечать требованиям эксперта, постепенно выясняемым в процессе диалога с ним. Таким образом, в процессе поиска, сформированный на подготовительном этапе алгоритма набор постепенно сокращается. Так, если эксперт согласился, например, увеличить элемент реальной МПП, то из набора удаляются все кортежи, в которых присутствует этот элемент со значением меньшим, чем имеющееся первоначально. И наоборот, если эксперт отказался увеличить элемент реальной МПП, то из набора удаляются все кортежи, в которых присутствует этот элемент со значением большим первоначального.

Когда при просмотре набора будет найден кортеж из элементов МПП, на которые эксперт согласен изменить соответствующие элементы реальной МПП, а, следовательно, найдена и ИСМПП, которая соответствует кортежу, то эта матрица и становится результатом работы алгоритма. То есть, в результате работы алгоритма, эксперт соглашается привести реальную МПП к ИСМПП путем изменения некоторого множества элементов первой матрицы. В другом случае, может произойти так, что на некотором шаге алгоритма в наборе не останется кортежей, тогда делается вывод о том, что попытка эксперта согласовать реальную матрицу (привести ее к ИСМПП) является неуспешной.

При успешном завершении алгоритма относительные значения весов объектов легко найти, например, в случае аддитивных сравнений, взяв за основу одну из строк (m -ю) полученной ИСМПП и определив методом непосредственной оценки

ненормированное абсолютное значение $v_{дом}$ доминирующего по этой строке объекта. На основании этого определяются ненормированные абсолютные значения весов объектов:

$$v_i = v_{дом} - (d_{i m} - d_{дом m}).$$

В случае мультипликативных сравнений для определения весов альтернатив нет необходимости в непосредственной оценке ненормированного абсолютного значения доминирующего по строке объекта, а ненормированные значения весов объектов находятся следующим образом:

$$v_i = d_{дом m} / d_{i m}.$$

Комбинаторный алгоритм парных сравнений с дополнительной проверкой согласованности матрицы сравнений

Метод полностью аналогичен методу, описанному выше, с той особенностью, что на поисковом этапе алгоритма, перед каждым обращением к эксперту, проверяется согласованность МПП полученной из исходной (реальной) МПП путем замены тех ее элементов на соответствующие элементы ИСМПП, изменение которых было согласовано с экспертом на предыдущем шаге. Согласованность проверяется методом определения спектральных коэффициентов согласованности, описанным в [2], и в случае, если минимальный из рассчитанных коэффициентов согласованности больше или равен порогу применения – процесс поиска ИСМПП останавливается и производится вычисление весов по частично согласованной матрице.

При использовании аддитивных сравнений для определения весов эксперту предлагается методом непосредственной оценки определить ненормированное абсолютное значение веса $v_{дом}^i$ - доминирующего по i -ой строке объекта. На основании этого определяются ненормированные абсолютные значения весов объектов:

$$v_h^* = 1/k \sum_{i=1}^k (v_{дом}^i - d_{i h} + d_{дом h}).$$

В случае мультипликативных сравнений для определения весов альтернатив нет необходимости в непосредственной оценке ненормированного абсолютного значения веса доминирующего по каждой строке объекта, а ненормированные значения весов объектов могут быть найдены как среднее геометрическое каждой строки полученной матрицы.

1. Циганок В.В. Комбінаторний алгоритм парних порівнянь зі зворотним зв'язком з експертом. // Реєстрація, зберігання і обробка даних, 2000, Т.2, №2, с.92-102.
2. Totsenko V.G. Spectral Method for Determination of Consistency of Expert Estimate Sets // Engineering Simulation, 2000, vol.17, pp.715-727.